Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)

Übungsblatt 3

4. Mai – 8. Mai 2026

Aufgabe 1 Quantisierung und Kanalrauschen

In dieser Aufgabe soll eine Temperaturkurve digitalisiert und der Einfluss von Rauschen auf Signale untersucht werden. Hierfür sollen Temperaturen im Bereich von −40 ℃ bis 70 ℃ betrachtet werden. Die gemessenen Werte sollen linear abgebildet werden, wobei eine Schrittweite von höchstens 0,5 ℃ erreicht werden soll.

a)* Erklären Sie den Unterschied zwischen Abtastung und Quantisierung.

- Abtastung ist die Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals im Zeitbereich ohne Runden.
- Quantisierung ist die Diskretisierung eines Signals in Signalstufen, d. h. im Wertebereich mit Runden.

b)* Wie viele Bit werden für die Digitalisierung eines einzelnen Temperaturwerts mindestens benötigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aus der Vorlesung kennen wir den Zusammenhang

$$M = \frac{b - a}{\Delta}, \tag{1.1}$$

wobei M die Anzahl der Signalstufen, a und b die Unter- bzw. Obergrenze des Quantisierungsintervalls sowie Δ die Stufenbreite bezeichnet. Einsetzen liefert $M = 220$ Signalstufen, was wiederum $N = \lceil \log_2(M) \rceil = 8\,\text{bit}$ entspricht.

c) Mit welcher Schrittweite kann aufgrund der verwendeten Bitanzahl laut Teilaufgabe b) nun die Temperatur bestimmt werden?

Da wir ohnehin 8 bit zur Darstellung von Quantisierungsstufen nutzen müssen, ergeben sich in der Praxis $M' = 256$ anstelle von $M = 220$ Quantisierungsstufen. Auflösen von (1.1) nach Δ' und Einsetzen ergibt $\Delta' \approx 0{,}43\,°\text{C}$

d) Bestimmen Sie den maximalen Quantisierungsfehler bezüglich der berechneten Schrittweite aus Teilaufgabe c) unter der Annahme, dass mathematisches Runden verwendet wird.

$$\Delta'/2 = 0{,}43\,°\text{C} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}215\,°\text{C}$$

Sollten Sie vorhergehende Teilaufgaben nicht gelöst haben, gehen Sie von 256 Quantisierungsstufen aus.[1] Das verwendete Basisbandsignal verwendet für jede Temperaturstufe genau ein Symbol. Es soll eine Kanalkapazität von 10 kbit/s erreicht werden.

e) Bestimmen Sie die mindestens benötigte Bandbreite bei einem rauschfreien Kanal, wenn die angegebene Kanalkapazität erreicht werden soll.

Gesetz von Hartley: $C_H = 2B\log_2(M) \Rightarrow B = \frac{C_H}{2\log_2(M)} = 625\,\text{Hz}$

f) Auf welchen Wert würde die Kanalkapazität bei gleicher Bandbreite sinken, wenn ein SNR von 35 dB angesetzt werden würde?

Gesetz von Shannon: $C_S = B\log_2(1 + \text{SNR})$ wobei dB das 10-fache des dekadischen Logarithmus zweier gleicher Größen angibt. Wir erhalten also für das SNR:

$$\text{SNR} = 10\log(X) \Rightarrow X = 10^{(\text{SNR}/10)} \approx 3162.28$$

Eingesetzt in C_S ergibt sich:

$$C_S = B\log_2(1 + X) \approx 7267\,\text{bit/s}$$

(Die erzielbare Kanalkapazität ist stets das Minimum von C_H und C_S!)

[1] In der Klausur bauen Aufgaben grundsätzlich aufeinander auf, d. h. es sind Zwischenergebnisse vorheriger Teilaufgaben zu nutzen. Bei längeren Aufgaben geben wir – wenn es sich anbietet – manchmal Ersatzwerte an, so dass ein Wiedereinstieg möglich ist.

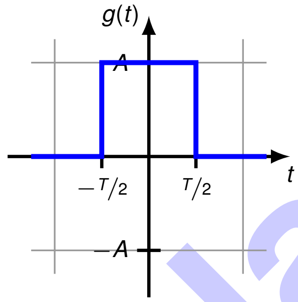
Aufgabe 2 Leitungscodes

In dieser Aufgabe wollen wir die beiden Leitungscodes NRZ und Manchester miteinander vergleichen. Beispielhaft soll die Bitfolge `1001 0011` übertragen werden.

a)* Geben Sie den NRZ-Grundimpuls sowohl grafisch als auch analytisch an.

Sei $A > 0$ der betragsmäßig maximale Signalpegel. Dann gilt:

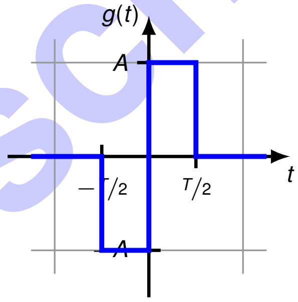
$$g_{\text{NRZ}}(t) = \begin{cases} A & -T/2 \le t < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



b)* Geben Sie den Manchester-Grundimpuls sowohl grafisch als auch analytisch an.

Sei $A > 0$ der betragsmäßig maximale Signalpegel. Dann gilt:

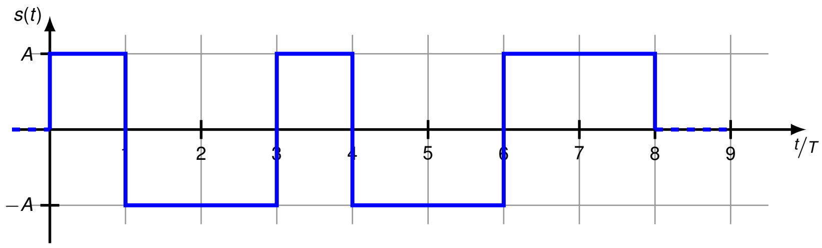
$$g_{\text{Manch}}(t) = \begin{cases} -A & -T/2 \le t < 0 \\ A & 0 \le t < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



c)* Weswegen gibt es für beide Leitungscodes jeweils zwei Möglichkeiten, die angegebene Bitfolge zu übertragen?

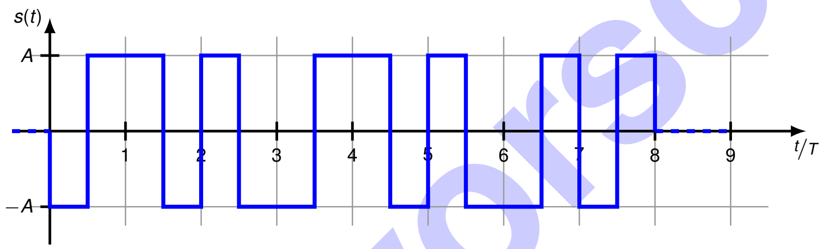
Eine logische `1` kann bei einem binären Leitungscode entweder durch niedriges oder hohes Potential (bzw. im Fall des Manchester Codes durch eine steigende oder fallende Taktflanke) dargestellt werden. Welche Bedeutung Verwendung findet, ist Definitionssache.
Z. B. gibt es neben der bei 10-Base-T verwendeten Form des Manchester Codes (steigende Taktflanke bedeutet logisch `1`) auch die Variante Manchester II (auch „Biphase-L" genannt), bei der die Definition genau umgekehrt lautet.

d)* Geben Sie das kodierte Basisbandsignal an, sofern NRZ verwendet wird.



Der Beginn des Signals kann variieren und wie hier bei $t = 0$ oder z.B. bei $t = \frac{T}{2}$ liegen. Dies stellt kein Problem dar und entspricht lediglich einem zeitlichen Versatz des Signalstarts zum Betrachtungspunkt 0 s.

e)* Geben Sie das kodierte Basisbandsignal an, sofern Manchester verwendet wird.



Aus der Vorlesung ist das Spektrum des NRZ-Impulses bekannt als

$$G_{\mathrm{NRZ}}(f) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}. \tag{2.1}$$

f)* Bestimmen Sie das Spektrum $G_{\text{Manch}}(f)$ des Manchester Impulses.

Hinweis: Bekannt sein sollten die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sin(t) = \cos(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\cos(t) = -\sin(t)$ sowie die Zusammenhänge $\sin(-t) = -\sin(t)$ (ungerade Funktion) und $\cos(-t) = \cos(t)$ (gerade Funktion).
Aus der Vorlesung kennen wir die Eulersche Formel $e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$.

Damit ist die Fouriertransformation des in Teilaufgabe b) gefragten Zeitsignal $g_{textManch}(t)$ „nur“ noch Rechenarbeit, die ein wenig geübt werden muss:

$$
\begin{aligned}
G_{\text{Manch}}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\text{Manch}}(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(-\int_{-T/2}^{0} \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{T/2} \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)\,\mathrm{d}\,t \right) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} \left(-[\sin(2\pi ft)]_{-T/2}^{0} + j[-\cos(2\pi ft)]_{-T/2}^{0} + [\sin(2\pi ft)]_{0}^{T/2} - j[-\cos(2\pi ft)]_{0}^{T/2} \right) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} (-[0 - \sin(-\pi fT)] + j[-1 + \cos(-\pi fT)] + [\sin(\pi fT) - 0] - j[-\cos(\pi fT) + 1]) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} (-\sin(\pi fT) - j + j\cos(\pi fT) + \sin(\pi fT) + j\cos(\pi fT) - j) \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi f} (2j\cos(\pi fT) - 2j) \\
&= j\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(\pi fT) - 1}{\pi f}
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die imaginäre Einheit ($j^2 = -1$) wird in der Elektro- bzw. Informationstechnik mit j bezeichnet, da das in der Mathematik verwendete i hier für den Stromfluss genutzt wird.

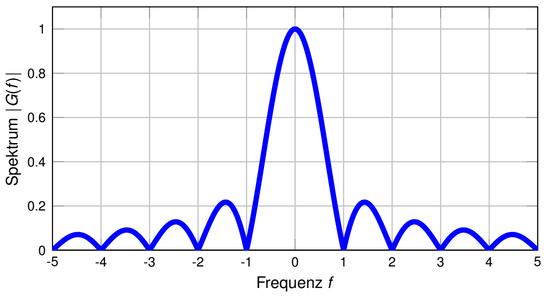
g) Was sagt das Verhalten der Spektren für $f \to \infty$ hinsichtlich der Übertragung auf einem realen Kommunikationskanal im Basisband aus?

Ein Kommunikationskanal ist stets ein Tiefpass, d. h. tiefe Frequenzen werden weniger stark gedämpft als hohe Frequenzen. Folgerichtig bedeutet ein schnelles Abklingen von mit steigenden Frequenzen weniger Verfälschung des Zeitsignals bei der Übertragung.

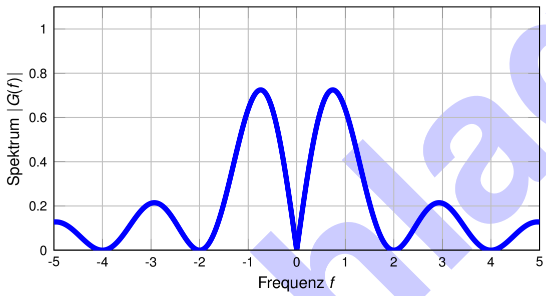
h) Klingt eines des der beiden Spektren für $f \to \infty$ schneller ab als das andere?

Beide Spektren klingen mit $^1/_f$ ab. Asymptotisch gibt es also keinen Unterschied zwischen beiden Impulsen.

i) Plotten Sie für $T = 1\,\mathrm{s}$ und $A = \sqrt{2\pi}$ sowohl $|G_{\mathrm{NRZ}}(f)|$ als auch $|G_{\mathrm{Manch}}(f)|$ in einem Programm Ihrer Wahl. Vergleichen Sie beide Spektren miteinander. (Hausaufgabe)
Auch wenn wir in Teilaufgabe h) gesehen haben, dass beide Spektren asymptotisch gleich schnell abklingen, hat der Manchester-Impuls offenbar eine größere Konstante. Praktisch würde das bedeuten, dass ein Tiefpass sich auf den Manchesterimpuls etwas mehr auswirkt als auf den NRZ-Impuls. Das ist insofern logisch, als dass der Manchester-Impuls ja in der Mitte einer Periodendauer immer einen Pegelwechsel hat, während der NRZ-Impuls hier konstant ist. Daran erkennt man, dass im Manchesterimpuls mehr höhere Frequenzanteile enthalten sind als im NRZ-Impuls.



(a) NRZ

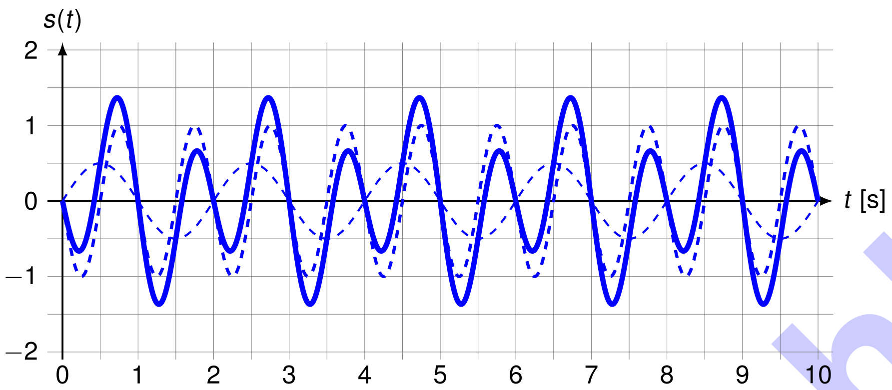


(b) Manchester

Aufgabe 3 Abtastung periodischer Signale (Zusatzaufgabe)

Gegeben sei das periodische Zeitsignal $s(t) = \frac{1}{2}\sin(\pi t) - \sin(2\pi t)$.

a)* Skizzieren Sie $s(t)$ im unten abgedruckten Koordinatensystem für $t \in [0; 10)$. **Hinweis:** Es ist hilfreich, sich zunächst die beiden Sinusanteile, aus denen $s(t)$ zusammengesetzt ist, zu skizzieren.



b)* Welche Periodendauer T besitzt das Signal $s(t)$?

$s(t)$ ist aus zwei Sinus-Anteilen aufgebnaut. Der erste hat eine Periodendauer von $T_1 = 2\,\mathrm{s}$, der zweite eine Periode von $T_2 = 1\,\mathrm{s}$. Die Periodendauer von $s(t)$ ist i. A. das **kleinste gemeinsame Vielfache** der Perioden der Einzelanteile, aus der es aufgebaut ist, hier also $T = T_1 = 2\,\mathrm{s}$.
Dies sieht man auch in der Lösung von Teilaufgabe a), da sich $s(t)$ alle $t = 2\,\mathrm{s}$ wiederholt.

c) Bestimmen Sie die maximale Frequenz $f_{\max}$, welche in $s(t)$ vorkommt.

Die beiden Sinusanteile haben die Frequenzen $f_1 = 1/T_1 = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 1/T_2 = 1\,\mathrm{Hz}$. Die maximale Frequenz ist daher $f_{\max} = f_2 = 1\,\mathrm{Hz}$.

d) Wie hoch muss demnach die *minimale Abtastfrequenz* f_a sein, so dass aus den unquantisierten Abtastwerten eine *verlustfreie* Rekonstruktion möglich ist?

$f_a = 2f_{\max} = 2\,\mathrm{Hz}$

e) Wie viele Abtastwerte werden also pro Periode benötigt?

Zwei Abtastwerte pro Sekunde bzw. vier pro Periode.