Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

# Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)

Übungsblatt 4

11. Mai – 15. Mai 2026

***Hinweis:** Am Donnerstag entfallen die Übungsgruppen ganztägig wegen des Feiertags. Die Übungen am Freitag finden statt.*



## Aufgabe 1 Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit

In der Vorlesung wurde die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für Funkverbindungen mit etwa $p_{e,1} = 10^{-4}$ sowie für Ethernet über Kupferkabel mit etwa $p_{e,2} = 10^{-8}$ angegeben. Wir nehmen an, dass Bitfehler unabhängig voneinander und gleichverteilt durch ein Rauschen mit über die Zeit konstanter Leistung auftreten. Die Kanaleigenschaften ändern sich über die Zeit hinweg also nicht. Weitere Störeinflüsse wie Interferenzen seien ausgeschlossen. Die Rahmenlänge betrage 1500 B.

a)* Bestimmen Sie für beide Übertragungsarten die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen fehlerfrei übertragen wird.

$$\Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] = (1 - p_e)^{\ell \cdot 8} = (1 - p_e)^{12000}$$

Mit $\ell = 1500$ B: für kabelgebundene Verbindung ergibt sich damit eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 99,99 %, für kabellose Übertragung lediglich 30,12 %.

Im Folgenden betrachten wir nur noch die kabellose Verbindung. Da die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit relativ hoch ist, sieht ein Protokoll auf der Sicherungsschicht Bestätigungen vor. Für korrekt übertragene Rahmen wird also eine Bestätigung verschickt. Bleibt eine Bestätigung aus, so nimmt der Sender an, dass die Übertragung nicht erfolgreich war. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass Bestätigungen nicht verloren gehen.

b)* Gibt es eine maximale Anzahl an Wiederholungen, bis ein bestimmter Rahmen garantiert korrekt übertragen wurde?

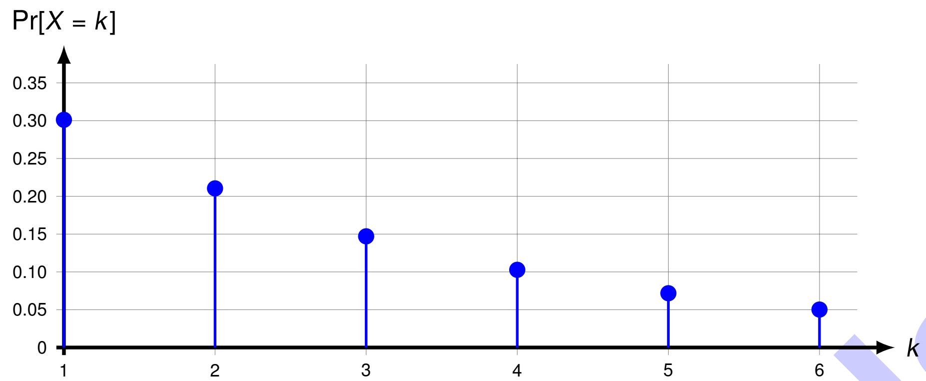
Nein. Die einzelnen Übertragungen sind unabhängig voneinander, d. h. es tritt auch bei jeder Wiederholung ein Rahmenfehler mit den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten auf. Es bleibt also stets ein Restrisiko.

c)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Rahmen genau $k$-mal übertragen werden muss.

Die Zufallsvariable $X \sim \text{Geo}(p_R)$ gebe die Anzahl der notwendigen Übertragungen an.
Mit $p_R = \Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}]$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Pr[X = k] &= \Pr[\text{„Übertragung } (k-1)\text{-mal erfolglos“}] \cdot \Pr[\text{„Kein Bitfehler im Rahmen“}] \\
&= (1 - p_R)^{k-1} \cdot p_R \\
&= \left(1 - \left(1 - p_{e,1}\right)^{12000}\right)^{k-1} \cdot \left(1 - p_{e,1}\right)^{12000}
\end{aligned}$$

d)* Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe c) für $k \in \{1, ..., 6\}$.




e) Angenommen das zuständige Protokoll auf der Sicherungsschicht bricht die Wiederholung ab, falls der dritte Sendeversuch erfolglos war. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen nicht übertragen werden kann?

Die Wahrscheinlichkeit entspricht der, dass die Übertragung drei mal in Folge fehlschlug ohne Rücksicht darauf, ob es beim 4. Mal funktioniert oder nicht. Dies ergibt

$$\Pr[X > 3] = 1 - \Pr[X \leq 3] = 1 - \sum_{k=1}^{3} \Pr[X = k] \approx 34\,\%$$

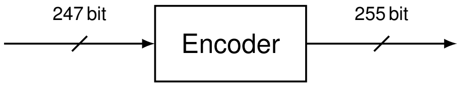
Alternative Lösung:

$$\Pr[X > 3] = (1 - p_R)^3 \approx 34\,\%$$

Achtung: Die alternative Lösung ist nur deswegen korrekt, da $X$ geometrisch verteilt ist und die geometrische Verteilung gedächtnislos ist, d. h. das Fehlschlagen der $k$-ten Übertragung beeinflusst nicht die $(k+1)$-te Übertragung. Wäre diese Unabhängigkeit nicht erfüllt, so würde die alternative Lösung ein falsches Ergebnis liefern!

## Aufgabe 2 Kanalkodierung

In der vorherigen Aufgabe haben wir gesehen, dass die Rahmenfehlerwahrscheinlichkeit bei schlechter Kanalqualität zum Problem werden kann. Für den Funkkanal mit einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_e = 10^{-4}$ betrug die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Rahmen der Länge 1500 B nur etwa 30 %. Um der hohen Bitfehlerrate zu begegnen, kommt nun ein Blockcode auf Schicht 1 zum Einsatz:




Dieser ermöglicht es dem Decoder auf der Empfängerseite in einem Kanalwort der Länge $n = 255$ bit *einen beliebigen* Bitfehler zu korrigieren. Treten zwei oder mehr Bitfehler auf, so ist die Entscheidung des Decoders falsch und die gesamte Information des Kanalworts verloren.

a)* Bestimmen Sie die Coderate.

$$R = \frac{k}{n} = \frac{247}{255} \approx 0.97$$

b)* Was sagt die Coderate aus?

Die Coderate drückt das Verhältnis zwischen der Größe eines Nutzdatenblocks und der Größe eines durch Redundanz gesicherten Nutzdatenblocks (Kanalwort) aus. Je kleiner $R$, desto mehr Redundanz wurde hinzugefügt.
Für $R = 247/255$ trägt also jedes Kanalwort der Länge 255 bit insgesamt 8 bit an Redundanz sowie 247 bit Information.

c)* Da der Rahmen größer ist als ein Block von 247 bit, muss dieser in mehrere Blöcke zerlegt werden. Bestimmen Sie die Anzahl $N$ der Kanalwörter, die übertragen werden müssen.

Jedes Kanalwort der Länge 255 bit trägt 247 bit Nutzdaten. Es ergibt sich also:

$$N = \left\lceil \frac{1500 \cdot 8}{247} \right\rceil = 49.$$

d) Im letzten Kanalwort ist Padding enthalten. Bestimmen Sie den prozentualen Overhead des Paddings im Verhältnis zu den möglichen Nutzdaten in den Kanalwörtern.

mögliche Nutzdaten = $N \cdot 247\,\text{bit} = 12\,103\,\text{bit}$
Padding = mögliche Nutzdaten - reale Nutzdaten = $12\,103\,\text{bit} - 1500\,\text{B} \cdot 8 = 103\,\text{bit}$

$$\gamma = \frac{\text{Padding}}{\text{mögliche Nutzdaten}} = \frac{103\,\text{bit}}{12\,103\,\text{bit}} \approx 0{,}85\,\%.$$

Alternativ:

$$\gamma = \frac{\text{Padding}}{\text{reale Nutzdaten} + \text{Padding}} = \frac{103\,\text{bit}}{1500\,\text{B} \cdot 8 + 103\,\text{bit}} \approx 0{,}85\,\%.$$

e)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Kanalwort fehlerhaft dekodiert wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb des Kanalworts zwei oder mehr Fehler auftreten. Sei $X \sim \text{Bin}\,(n, p_e) = \text{Bin}\,(255, 10^{-4})$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der Bitfehler in einem Kanalwort der Länge $n$ angibt.

$$\begin{aligned} p_{e,Codewort} &= \Pr[X \geq 2] = 1 - \Pr[X \leq 1] = 1 - \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} \cdot p_e^i \cdot (1 - p_e)^{n-i} \\ &= 1 - \left(1 \cdot p_e^0 \cdot (1 - p_e)^{255} + 255 \cdot p_e^1 \cdot (1 - p_e)^{254}\right) \\ &\approx 1 - \left(0,9748 + 255 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9748\right) \\ &\approx 3.18 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

f) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rahmen korrekt übertragen wird – also keines der Kanalwörter, die den Rahmen ausmachen, fehlerhaft übertragen wird.

Damit der Rahmen korrekt übertragen wird, müssen alle Kanalwörter korrekt übertragen werden. Es ergibt sich mit den Ergebnissen der vorhergehenden Teilaufgaben also:

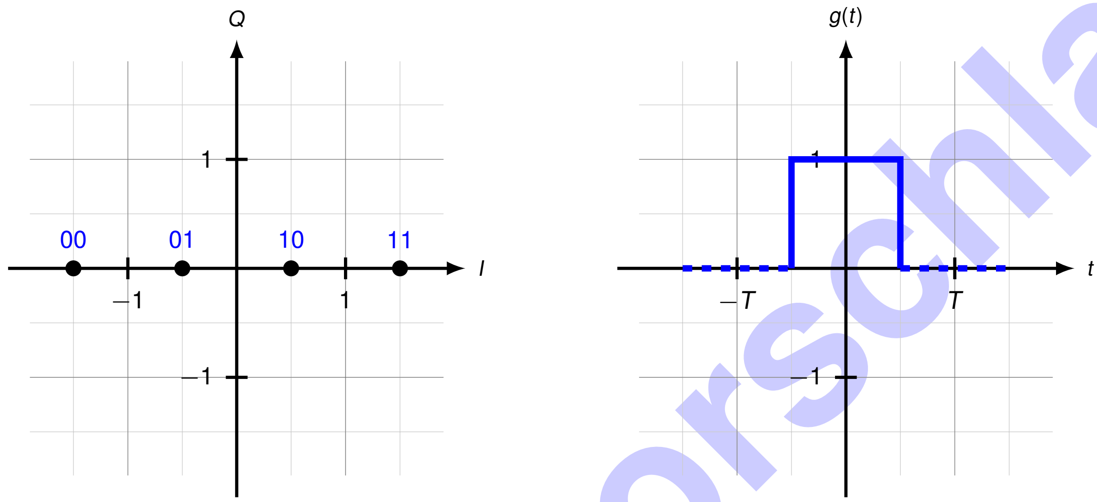
$$\Pr[\text{„Kein Fehler im Rahmen"}] = (1 - p_{e,Codewort})^N \approx 98{,}50\,\%$$

# Aufgabe 3 Digitale Modulationsverfahren

**Hinweis:** Hierbei handelt es sich um eine Klausuraufgabe aus der Midterm 2012.
In dieser Aufgabe sollen die Vorgänge der Impulsformung im Basisband und der anschließenden Modulation erarbeitet werden. Dazu ist in Abbildung 3.1 der Signalraum eines digitalen Modulationsverfahrens gegeben. Außerdem sei die zu übertragende Bitfolge `01111001` gegeben. Als Grundimpuls für das Basisbandsignal soll der Rechtecksimpuls

$$\mathrm{rect(t)} = \begin{cases} 1 & -T/2 \leq t < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet werden.




(a) Signalraum (b) Sendegrundimpuls

Abbildung 3.1: Signalraum und Sendegrundimpuls

a)* Um welches Modulationsverfahren handelt es sich?

4-ASK

b)* Tragen Sie in Abbildung 3.1a eine gültige Zuordnung von Codewörtern zu Symbolen ein.

c)* Zeichnen Sie in Abbildung 3.1b den Sendegrundimpuls $g(t)$ ein.

d)* Zeichnen Sie nun in Abbildung 3.2 das zu der gegebenen Bitfolge passende Basisbandsignal ein.

Das Basisbandsignal aus der vorherigen Teilaufgabe werde nun verwendet, um den Kosinusträger $s(t) = \cos(2\pi t/T)$ zu modulieren.

e) Zeichnen Sie das modulierte Signal ebenfalls in Abbildung 3.2 ein.

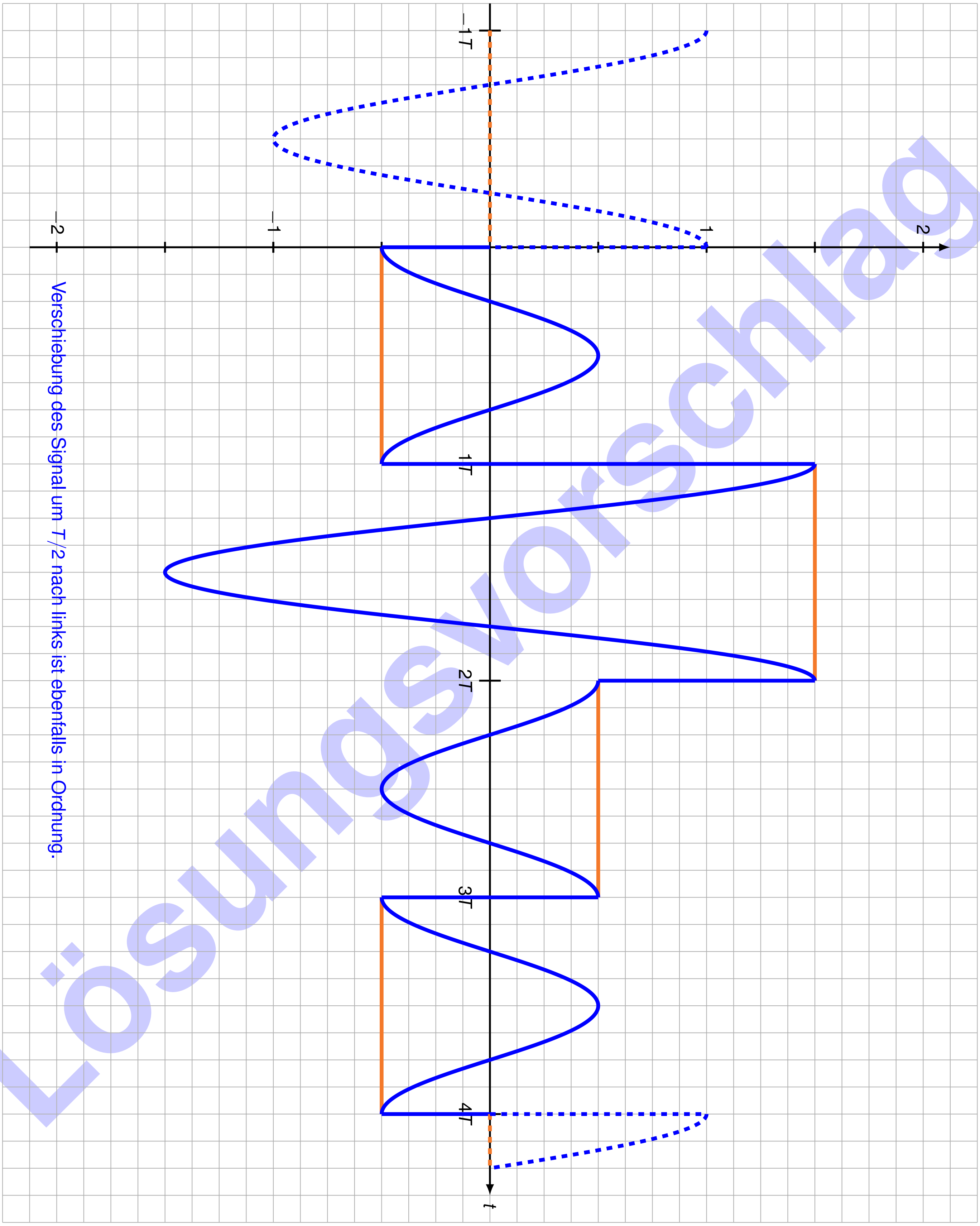



Abbildung 3.2: Lösungsblatt für Teilaufgaben d) und e)

## Aufgabe 4 Erzielbare Datenraten mit IEEE 802.11a Wireless LAN (Zusatzaufgabe)

In dieser Aufgabe betrachten wir die physikalische Schicht von IEEE 802.11a (einem der WLAN-Standards). Diese verwendet Trägerfrequenzen zwischen 5127 MHz und 5910 MHz. Da die Regulierung der Funkfrequenzen landesabhängig ist, unterscheiden sich die verfügbaren Frequenzbereiche im internationalen Vergleich. In Deutschland beispielsweise steht lediglich der Bereich 5170 MHz bis 5330 MHz ohne Einschränkungen zur Verfügung. Dies entspricht einer Bandbreite von 160 MHz, welche in insgesamt 8 Kanäle zu jeweils 20 MHz unterteilt ist. Jeder Kanal ist wiederum in 64 Subcarrier zu je 312,5 kHz unterteilt (siehe Abbildung 4.1). Von diesen Subcarriern werden lediglich 48 zur Datenübertragung genutzt[1].

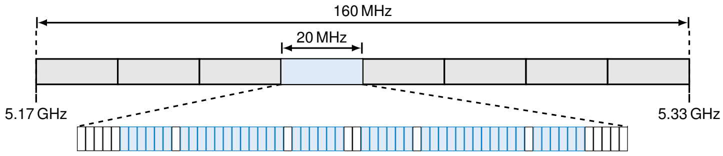



Abbildung 4.1: IEEE 802.11a Kanalaufteilung. Von den insgesamt 64 Subcarriern werden lediglich 48 (blau) zur Datenübertragung genutzt.

| Datenrate [Mbit/s] | Modulation | Coderate |
|---|---|---|
| 6 | BPSK | 1/2 |
| 9 | BPSK | 3/4 |
| 12 | QPSK | 1/2 |
| 18 | QPSK | 3/4 |
| 24 | 16-QAM | 1/2 |
| 36 | 16-QAM | 3/4 |
| 48 | 64-QAM | 2/3 |
| 54 | 64-QAM | 3/4 |

Abbildung 4.2: Datenraten, Modulationsverfahren und Coderaten für IEEE 802.11a.

Die Symboldauer (zeitliche Ausdehnung eines Sendeimpulses) beträgt daher $1/312{,}5\,\text{kHz} = 3{,}2\,\mu\text{s}$. Um Störungen durch Reflexionen zu vermeiden, wird zwischen Symbolen ein zeitlicher Schutzabstand (engl. „Guard Interval“) eingefügt. Die effektive Symboldauer beträgt daher $T_s = 4\,\mu\text{s}$.

Die effektiv erzielbare Datenrate hängt nun vom verwendeten Modulationverfahren sowie der Coderate des Kanalcodes ab. Diese sind in Tabelle 4.2 aufgelistet.

**Wir betrachten zunächst nur die maximale Übertragungsrate $r_{\max} = 54\,\text{Mbit/s}$.**

a)* Wieviele Bit werden pro Sendesymbol übertragen?

Sei $M$ die Anzahl unterschiedlicher Symbole, für 64-QAM also $M = 64$. Dann erhalten wir pro Symbol

$$n = \log_2(M) = \log_2(64) = 6\,\text{bit}.$$

b) Wie viele Bit werden bei Verwendung von 48 Subcarriern insgesamt pro Symboldauer übertragen?

$$n_{brutto,48} = n \cdot 48 = 288\,\text{bit}$$

c) Der in Teilaufgabe b) berechnete Wert bezieht sich auf Kanalwörter, d. h. es ist Redundanz enthalten. Bestimmen Sie Menge an übertragenen Nutzdaten pro Symboldauer.

$$n_{netto,48} = \frac{3}{4} n_{brutto,48} = 216\,\text{bit}$$

d) Bestätigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Teilaufgabe c) die maximale Datenrate $r_{\max} = 54\,\text{Mbit/s}$.

$$r_{\max} = \frac{n_{netto,48}}{T_s} = 216\,\text{bit} \cdot 250\,000/\text{s} = 54\,\text{Mbit/s}$$

[1] Die übrigen sind entweder nicht belegt oder werden zur Übertragung sog. Pilotsymbole verwendet, welche der Kanalschätzung dienen. Dies vernachlässigen wir in dieser Aufgabe.

e)* Bestimmen Sie nun unter Verwendung von Hartleys Gesetz die minimal notwendige Bandbreite $B_{\text{min}}$, die notwendig ist, um unter Verwendung von 64 unterscheidbaren Symbolen eine Datenrate von 54 Mbit/s zu erreichen.

$$r = 2B_{\text{min}} \log_2(M) \Rightarrow B_{\text{min}} = \frac{r}{2\log_2(M)} = \frac{54\,\text{Mbit/s}}{2 \cdot \log_2(64)\,\text{bit}} = 4{,}5\,\text{MHz}$$

f) * Bestimmen Sie das minimale SNR nach Shannon in der Einheit dB, so dass theoretisch die maximale Datenrate $r_{\text{max}} = 54\,\text{Mbit/s}$ erreicht werden kann.
**Hinweis:** Gehen Sie vereinfachend von der gesamten Kanalbandbreite von $B = 20\,\text{MHz}$ aus.

$$\begin{aligned} r_{\text{max}} &\overset{!}{=} B \log_2(1 + \text{SNR}) \\ \text{SNR} &= 2^{r_{\text{max}}/B} - 1 \\ &= 2^{(54 \cdot 10^6)/(20 \cdot 10^6)} - 1 = 2^{54/20} - 1 = 2^{2{,}7} - 1 \approx 5{,}50 \end{aligned}$$

Umrechnung in dB:

$$\text{SNR}\,\text{dB} = 10 \cdot \log(\text{SNR})\,\text{dB} \approx 7{,}40\,\text{dB}$$

**Hinweis:**

- $\log$ oder $\log_{10}$ $\triangleq$ Zehnerlogarithmus
- $\log_2$ oder $\text{ld}$ $\triangleq$ Logarithmus Dualis
- $\ln$ $\triangleq$ natürlicher Logarithmus

g) Die Signalleistung beim Empfänger betrage nun 45 µW. Das Rauschen habe eine Leistung von 15 µW. Welches Modulationsverfahren und welche Coderate werden unter diesen Bedingungen zum Einsatz kommen?
**Hinweis:** Gehen Sie vereinfachend von der gesamten Kanalbandbreite von $B = 20\,\text{MHz}$ aus.

$$\begin{aligned} r &= B \cdot \log_2(1 + \text{SNR}) \\ &= B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right) \\ &= 20 \cdot 10^6/\text{s} \cdot \log_2\left(1 + \frac{45}{15}\right)\,\text{bit} = 40\,\text{Mbit/s} \end{aligned}$$

Aus Tabelle 4.2 sehen wir nun, dass $48\,\text{Mbit/s} > r > 36\,\text{Mbit/s}$ gilt. Die Datenrate wird demnach auf höchstens 36 Mbit/s heruntergeschaltet. Es kommt folglich QAM-16 sowie eine Coderate von $R = 3/4$ zum Einsatz.